数理解析研究所講究録
577巻 1985年 153-163

II_1型因子環の指数から生まれたknotsとlinksの不変量
——— V. Jonesの仕事の紹介 ———

大阪教育大学 綿谷安男 (Yasuo Watatani)

0 はじめに

1見したところ何の関係もなさそうな，作用素環の理論と結び目の理論，という２つの異なった分野の数学の間に誰れも予期できなかった深い関連を見つけだしたV. Jonesの仕事[4]を，ＭＳＲＩでの彼の講義をもとに，紹介する。全体的なことはすでに小林毅氏の解説[5]があるので，ここでは特に，作用素環をほとんど知らない人のために，Jones多項式の生まれた背後にある作用素環のことを中心にして説明をしたい。V. Jonesは，II_1型因子環の部分因子環に対して指数の概念を導入した[2]。群の指数とは違い，そのとる値は整数値ではなく，連続な値をとる。これは作用素環が《連続次元》の線型代数とも言えることが反映しているので数学の他の分野にとっても魅力のある事実だと思う。さらに彼はII_1型AF

因子環の部分因子環の指数のとりえる値を完全に決定し，それが $\{4\cos^2\frac{\pi}{n} \mid n=3,4,5\cdots\} \cup \{r\in\mathbb{R} \mid r\geq 4\} \cup \{\infty\}$ になることを示した。この $4\cos^2\frac{\pi}{n}$ という値は整数論にも現れる不思議な数であり，整数論と作用素環論との深い関連を予言する1つの象徴（しるし）だとみられている。さて彼が指数の決定を証明するために考え出した，ある関係をみたす射影元達のつくる有限次元 von Neumann algebras $A_n(\beta)$ の増大列，こそが，knots と links の新しい不変量 Jones 多項式を生みだした，源泉になったのである。その関係が組み紐群や A_n 型の Hecke 環に表われる関係と非常に酷似していた事[3]が一連の発見の導火線になったのである。そこでそれをここで表にしておく：

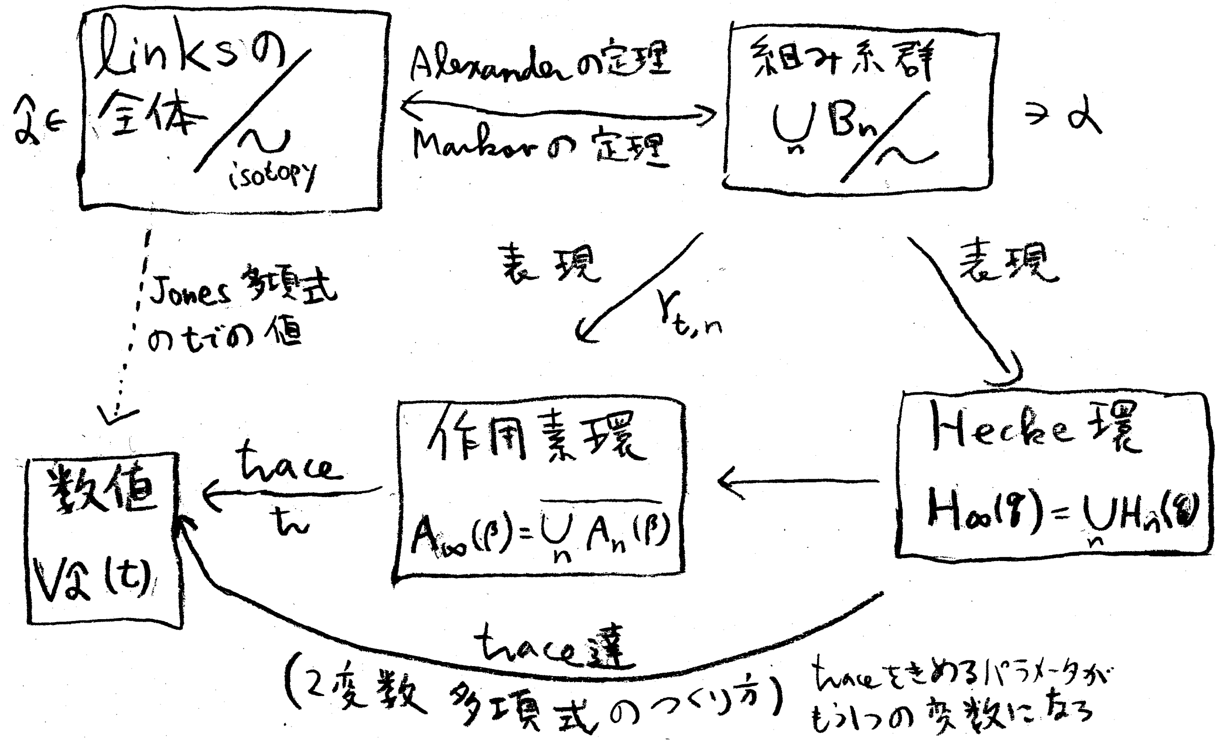
	作用素環 $A_{n-1}(\beta)$	組み紐群 B_n	Hecke 環 $H_{n-1}(\gamma)$
生成元	$e_1, e_2, \cdots\cdots e_{n-1}$	$\sigma_1, \sigma_2, \cdots\cdots, \sigma_{n-1}$	$g_1, g_2, \cdots\cdots, g_{n-1}$
関係式	① $e_i^2 = e_i = e_i^*$（射影） ② $e_ie_{i\pm1}e_i = \tau e_i$（$\tau$は指数） ③ $e_ie_j = e_je_i$（$\lvert i-j\rvert\geq 2$の時）	 ② $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ ③ $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$（$\lvert i-j\rvert\geq 2$の時）	① $g_i^2 = (\gamma-1)g_i+\gamma$ ② $g_ig_{i+1}g_i = g_{i+1}g_ig_{i+1}$ ③ $g_ig_j = g_jg_i$（$\lvert i-j\rvert\geq 2$ の時）

(注) 関係式の ①は Conway relation というものに対応している

(注) 上で $\beta=\frac{1}{\tau}$ は因子環の指数と解釈されうるパラメータであり，Jones 多項式の変数 t とは $\tau=\frac{t}{(1+t)^2}=\beta^{-1}$ の式で

結ばれるハズであり, さらにHecke環のパラメータ q とは $t=q$ として結ばれている。

さて, 組み紐群 B_n の元 α の上下を結びつけると link $\hat{\alpha}$ ができる。Alexanderの定理より任意の linkはこのようにして実現できる。2つの links $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ がいつ同値になるかは, Markovの定理によって与えられており, それを利用して, links $\hat{\alpha}$ の新しい不変量 Jones多項式 $V_{\hat{\alpha}}(t)$ は次の図式によって定義される:



$$\boxed{V_{\hat{\alpha}}(t) \underset{def}{=} \left(\frac{-(t+1)}{\sqrt{t}}\right)^{n-1} t^{e(\alpha)/2}\, \mathrm{tr}\left(r_{t,n}(\alpha)\right)}$$

このJones多項式は以前から知られていたAlexander多項式では区別できなかった多くのKnotsやlinksを区別して非常に強力であることがわかる。その間もなく今度は、上のAlexander多項式とJones多項式を統合してさらに強力な2変数多項式が、何人もの数学者たちによって独立にえられた[1]。その後も日本人を含めて多くの研究者によって発展を続けているのであるが、以下では作用素環からの起源を明らかにすることに主眼をおくことにする。

[1] 作用素環

作用素環とは、具体的には、ヒルベルト空間上の有界作用素達のつくる、ある位相について閉じた*環のことである。特にノルム位相について閉じたC^*-環と弱(作用素)位相について閉じたvon Neumann環が主な対象である。可換な単位元をもつ(もたない)C^*環はコンパクトT_2空間X上の連続関数環$C(X)$に(局所コンパクトT_2空間X上の無限遠点で0である連続関数環$C_0(X)$に)同型であるというGelfand-Naimarkの定理をよりどころとして、C^*環を非可換位相幾何もしくは≪pointless geometry≫の視点でとらえることは今まで非常に生産的であった。同様に可換なvon Neuman環は測度空間$(X, \mathcal{B}, \mu)$上の本質的有界関数環$L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$

に同型であることより，von Neumann環を非可換積分論の立場から攻略することは豊かであった。作用素環の一般論については[6]，[7]，[8]を参照してもらうことにする。

Def　Aが（抽象的な）C^*環とは

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

① Aは$\mathbb{C}$上の algebra である

② A上に involution $A \ni a \longmapsto a^* \in A$がある：

（(i) $(a^*)^* = a$，(ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$，(iii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ (iv) $(ab)^* = b^* a^*$）

③ A上にノルム$\| \ \|$があり，それに関してAは完備

④ $\|ab\| \leqq \|a\| \|b\|$　　$(a, b \in A)$

⑤ （C^*条件）$\|a^* a\| = \|a\|^2$　　$(a \in A)$

例　次のAはC^*環である

① $A = \mathbb{C}$

② $A = M_n(\mathbb{C})$ ：$\mathbb{C}$上の$n \times n$行列全体，つまり行列環

③ $A = M_3(\mathbb{C}) \oplus M_5(\mathbb{C}) \oplus M_8(\mathbb{C})$ ：一般に行列環の直和

④ $A = B(H)$ ：Hilbert空間H上の有界作用素全体

⑤ $A = K(H)$ ：Hilbert空間H上のコンパクト作用素全体

⑥ $A = C(X)$ ：コンパクト空間X上の連続関数全体

⑦ $A = C_0(X)$ ：局所コンパクト空間X上の連続関数で∞で0になるもの

⑧ $A \subset B(H)$ ：ノルム位相で閉じた$B(H)$の$*$部分環

注　Wedderburnの定理より，有限次元C^*環は③の型に同型になる

Def Hilbert 空間 H 上の有界作用素全体 $B(H)$ に弱(作用素)位相を次で入れる：$x_\alpha, x \in B(H)$ として

$x_\alpha \longrightarrow x$ ：弱(作用素)位相で収束する

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \xi, \eta \in H$　$(x_\alpha \xi | \eta) \longrightarrow (x\xi | \eta)$

(つまり，無限行列 x_α, x の各行列成分ごとに収束すると思えばよい)

Def $A \subset B(H)$ が von Neumann 環（W^*-環ともいう）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ A は C^* 環でかつ弱(作用素)位相で閉じている．

例 次の A は von Neumann 環である

① $A = B(H)$

② $A = M_4(\mathbb{C}) \oplus M_7(\mathbb{C}) \oplus M_8(\mathbb{C})$ ；一般に行列環の直和

③ $A = \{M_f \in B(L^2(X,\mu)) \mid f \in L^\infty(X,\mu)\} \cong L^\infty(X,\mu)$ ：

$L^\infty(X,\mu)$ の元 f のかけ算作用素 M_f 全体　$(M_f(\xi) = f\cdot\xi,\ \xi \in L^2(X))$

Def von Neumann 環 A が因子環（factor）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ A の center $Z(A) \cong \mathbb{C}$

任意の von Neumann 環は因子環の(連続)直和に分解できるので，因子環とは，有限群論における単純群のようなものである。しかし有限単純群とは違い，因子環の完全分類は現在でも難しすぎて手がつかない状態である。因子環は大まかには，その中の射影元の構造により，I 型（I_n 型と I_∞ 型），II 型（II_1 型と II_∞ 型）と III 型とに分けられる．

$\boxed{\text{Def}}$ von Neumann環Mが<u>II_1型因子環</u>とは

Def
①Mは無限次元の因子環であり
②M上に唯1つ<u>trace</u>が存在する。つまり
$\exists!\ tr : M \longrightarrow \mathbb{C}$: linear map
s.t. $tr(ab) = tr(ba)\quad (\forall a, b \in M)$, $tr(1) = 1$

一口で言ってII_1型因子環とは《<u>連続</u>次元をもつ行列環のようなもの》である。実際$n \times n$行列環M_nにおいて、その射影元P (i.e. $P = P^* = P^2$)のtraceをとった値$Tr(P)$を調べると、それはPの値域に対応するベクトル空間の<u>次元</u>がでてくる。つまり、$\{Tr(P) \mid P \in M_n, P\text{は射影元}\} = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$。さて$Tr(1) = n$なので$tr(x) = \frac{1}{n} Tr(x)$とおいて正規化しておくと、それは$\{tr(P) \mid P \in M_n, P\text{は射影元}\} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\}$と離散的な値が次元に応じてでてくる。さて行列環$M_n$の代わりに$\mathrm{II}_1$型factor Mについてもその「次元の分布」を調べてみよう。すると、驚くべきことに$\{tr(P) \mid P \in M, P\text{は射影元}\} = [0, 1]$と0と1の間の数がベッタリと出てくるのである。これからもII_1-型因子環とは《連続次元をもつ"行列環"》と思ってよい。

$\boxed{\text{例}}$ $A_n = M_{2^n} = M_2 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_2$ (n回)とおき$A_n \longrightarrow A_{n+1}$を$x \longmapsto x \otimes 1$でうめこむ。$M = \overline{\bigcup_n A_n}^{\text{弱位相}}$は$\mathrm{II}_1$型因子環。

2 部分因子環の指数

II_1型因子環Mを1つ固定しよう。その部分因子環$N\subset M$を共役を除いて分類せよという問題にV. Jonesはとりくみ、その不変量として指数$[M:N]$の概念を導入した。群の場合に例えてみれば、$\mathbb{Z}$の2つの部分群$2\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$と$3\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$を区別するのに、その指数(index)を比べるとよい。実際$[\mathbb{Z}:2\mathbb{Z}]=2$で$[\mathbb{Z}:3\mathbb{Z}]=3$である。これは余りにも簡単な例だが、V. Jonesは同じようなことをII_1型因子環に対して試みたのである[2]。

Def Hilbert空間H上のII_1型因子環Mの部分因子環Nに対してその<u>指数</u>$[M:N]$を次で定義する

$$[M:N] \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{\dim_N(H)}{\dim_M(H)},\quad ただし\ \dim_M(H) = \frac{tr_M([M'\xi]に対する射影元)}{tr_{M'}([M\xi]に対する射影元)}$$

ここで上の値は$\xi\in H$ $(\xi\neq 0)$のとり方にはよらない。また$M'=\{x\in B(H)\mid \forall y\in M\ \ xy=yx\}$もまた因子環になる。(実は∞になる事があるのでもう少し条件がいるが、省く)

1口で言って$[M:N]$とは《Mの中にNがいくつ分入っているか》ということである。

例 (これはII_1型因子環ではないのだが)、

$$[M_6:M_2]=\frac{\dim M_6}{\dim M_2}=\frac{36}{4}=9 となる$$

さて，指数 $[M:N]$ は射影元の trace をとるので，その値が連続になって当然ではある。しかし驚くべきことに指数の値の分布には gap があることがわかったのである。実際 $\beta=4$ を境として離散部分と連続部分に分かれる。

$\boxed{\text{Theorem 1}}$ (V. Jones) II_1 型因子環 M に対して，部分因子環 $N\subset M$ の指数 $[M:N]$ のとり得る値は

$$\{4\cos^2\tfrac{\pi}{n}\mid n=3,4,5\cdots\}\cup\{r\in\mathbb{R}\mid r\geqq 4\}\cup\{\infty\}$$

に限る．さらにもし M が AF 型（つまり有限次元環で近似可能）なら，そのすべての値を実現する N が存在する∎

ここで $4\cos^2\frac{\pi}{n}$ という不思議な数の出現する内在的な理由は明らかでなく，謎のままである．さて V. Jones が上の Theorem 1 を証明した方法は，次のようである。von Neumann 環を非可換積分論の立場から捉えることで，$E_N: M\to N$ という条件付期待値が，確率論の時と同じように，存在する．それは $tr(E_N(m)n)=tr(mn)$ $(\forall m\in M, \forall n\in N)$ をみたす M から N の上への線型写像であり，$E_N^2=E_N$ となる。von Neuman 環 M 上に内積を $(x|y)=tr(y^*x)$ で入れ，$\|x\|_2=\sqrt{(x|x)}$ で M を完備化してできた Hilbert 空間を $L^2(M)$ とかく。$M\hookrightarrow L^2(M)$ として埋めこむことで，上の E_N は $e_N: L^2(M)\longrightarrow L^2(N)\subset L^2(M)$ という射影元に拡張できる．

Mとe$_N$から生成される$L^2(M)$上のvon Neumann環を$\langle M, e_N\rangle$とかくとこれはまた因子環になる。さて今度はMを$\langle M, e_N\rangle$の部分因子環とみなすことで，上の手続きをもう一度くり返すことができる：ある射影元$e_M : L^2(\langle M, e_N\rangle) \to L^2(M)$が存在して，$N \subset M \subset \langle M, e_N\rangle \subset \langle M, e_N, e_M\rangle$.
この構成を無限にくり返すことで，次のような因子環の無限塔ができる：($e_N = e_1$, $e_M = e_2$, $\cdots$ とおくと)

$$N \subset M \subset \langle M, e_1\rangle \subset \langle M, e_1, e_2\rangle \subset \langle M, e_1, e_2, e_3\rangle \subset \cdots$$

さてここでMを「約すると」

$$\langle 1\rangle \subset \langle 1, e_1\rangle \subset \langle 1, e_1, e_2\rangle \subset \langle 1, e_1, e_2, e_3\rangle \subset \cdots$$

と射影元から生成されたvon Neumann algebras

$$A_n(\beta) = \langle 1, e_1, e_2, \cdots, e_n\rangle$$

ができる．ここで$\beta = [M : N] = \frac{1}{\tau}$とおく．さて

$A_\infty(\beta)$を1と$\{e_i\}_{i=1}^\infty$で生成されたvon Neumann algebraとすると，$A_\infty(\beta)$はII_1-factorでその上のtraceをtrとかく．
この時次が成立する：

- $e_i e_{i\pm1} e_i = \tau e_i$
- $e_i e_j = e_j e_i \quad (|i-j| \geq 2)$
- $tr(w e_{n+1}) = \tau\, tr(w)$ if wが$e_1, \cdots, e_n$の有限積.

以上が作用素環における起源である。

References

[1] P. Freyd, D. Yetter; J. Hoste; W.B.R. Lickorish, K. Millett; and A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 239-246.

[2] V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-25.

[3] V. Jones, Braid groups, Hecke algebras and type II_1 factors, Proc. Japan-U.S. Conf. 1983 (to appear).

[4] V. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 103-112.

[5] T. Kobayashi, 絡み目理論の新しい不変量 ―作用素環に由来するJones多項式とその一般化―, 数学 (to appear)

[6] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I, Springer (1979).

[7] M. Takesaki, 作用素環の構造, 岩波書店 (1983).

[8] H. Umegaki, M. Ohya and F. Hiai, 作用素代数入門, 共立出版, (1985).